תרגיל בית 12

מבוא מתמטי לפיזיקה 1

העזרו בחומר שלמדתם בהרצאה בנוסף לתרגול. בנוסף, נסו לעבור על התרגילונים הנמצאים בתרגולים.

1. **השכמה** : חשבו את האינטגרלים הדו-מימדים הבאים

(a) $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-x^2-y^2}dxdy.$

(b) $\iint\limits_R \frac{x}{y}e^y dxdy$ ץכאשר R אומר $y \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 1$

2. **עדיין השכמה** : נתונות שתי העקומות $y = x$ ו-$y^2 = 2x$.

(א) שרטטו את שתי העקומות ואת השטח התחום בניהם.

(ב) חשבו את השטח התחום בין העקומות: פעם אחת שהאינטגרל לפי x הוא הראשון ובפעם אחרת לפי y .

3. **אחרי קפה** : חשבו את האינטגרל $I = \iint\limits_R \sin(y^2)\, dxdy$ כאשר R הוא התחום החסום ע"י $x + y = 0$, $2x - y = 0$ ו $y = 4$.

4. מעוניינים לחשב את האינטגרל $I = \int_0^\infty e^{-r}dr \int_r^\infty \frac{e^{-s}}{s}ds$.

(א) האינטגרל הפנימי הוא אינטגרל קשה. למעשה הוא נקרא $Ei(x)$ (exponential integral). ננסה להחליף את סדר האינטגרציה כניסיון נאיבי לפתור את האינטגרל בדרך אחרת. שרטטו את תחום האינטגרציה **הנוכחי** במישור (r, s) . **שימו לב שרצים על קווים מקבילים לs.**

(ב) החליפו לריצה על קווים מקבילים ל-r . יש לעדכן את גבולות האינטגרציה.

(ג) בצעו את האינטגרל הפנימי (אמור להיות קל משמעותית). קבלו אינטגרל חד מימדי שעדיין לא ביצעתם.

(ד) מצאו את הטור טיילור של $1 - e^{-x}$ והעזרו בו יחד עם האינטגרל $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x} = (n-1)!$ כדי לחשב את האינטגרל החד-מימדי הנותר.

(ה) קבלו תוצאה סופית $I = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. הסכום נקרא $\eta(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ (Dirichlet eta function).

5. נתון $r = 1 + \sin\theta$. בתחום $x > 0$ ו-$y > 0$ ו$r = 1 + \sin\theta$ יש צפיפות $\rho = 1$. מצאו $\langle x \rangle_\rho$.

6. נתונות שתי עקומות סגורות בפולריות : $r = a(1 + \cos\theta)$ ו $r = 3a\cos\theta$.

(א) שרטטו את שתי העקומות בתחום $\theta \in (0, 2\pi)$.

(ב) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r = 3a\cos\theta$ אבל מחוץ ל-$r = a(1 + \cos\theta)$.

7. חשבו את השטח הכלוא ברביע הראשון מתחת לעקומה $r = 2$ ומעל לעקומות $r = 2\sin\theta$ ו-$r = 2\cos\theta$.

בהצלחה!